ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION 1984

MATHEMATIQUES

EPREUVE COMMUNE
EDHEC - EISTI

Durée : 4 heures
Coefficient Option Générale : 5
Coefficient Option Technologique "G.M." : 4

I) Test sanguin

On estime à 20% le nombre de personnes atteintes d'une maladie A.

Pour diagnostiquer cette maladie ,on prélève sur les individus du sang. On fait ensuite une analyse de ce sang pour dépister la maladie.

Cette analyse coûte très cher ,c'est pourquoi on propose d'opérer de la façon suivante :

on forme des groupes de x personnes et on prélève une partie du sang de chacune des personnes que l'on met dans une même éprouvette et on fait l'analyse . Deux cas peuvent se produire:

a) L'analyse ne révèle pas de germe de la maladie et donc tous les membres du groupe sont en bonne santé.

b) L'analyse révèle une présence de germes et dans ce cas ,on refait une analyse pour chacune des personnes du groupe.

Le but du problème est de déterminer la taille x° du groupe qui permet en moyenne (espérance) d'aboutir au nombre minimum d'analyses .

1°) Pour toute valeur de x ,déterminer le nombre moyen (espérance) d'analyses par personne. On notera f(x) ce nombre.

2°) Etudier pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 2, la fonction f .En particulier ,on étudiera le signe de la dérivée seconde.

3°) En ne perdant pas de vue que la valeur x° cherchée est un nombre entier, trouver cette valeur en vous servant de la question précédente. On justifiera la réponse .

.../...

N.B. Lors de la correction il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et du soin apporté aux copies.

4°) Un hôpital décide d'effectuer par jour l'analyse sur n groupes de x° individus . On note X le nombre d'analyses réalisées par l'hôpital pendant une journée.
Montrez qu'il existe deux nombres a et b tels que la loi de la variable Y = aX + b peut être approximée par une loi binômiale dont on préçisera les paramètres.

5°) Déterminer la probabilité pour que la variable X soit supérieure au nombre d'analyses que l'on ferait si on opérait de façon classique (une analyse par individu) .
On calculera cette probabilité pour n=4 et pour n=50.

On voudrait généraliser cette méthode à n'importe quel type de maladie pour laquelle on connait la proportion de personnes atteintes .
On ne suppose donc plus cette proportion égale à 20% mais à un certain nombre p compris entre 0 et 1 .

6°) Déterminer la plus petite valeur $\tilde{p}$'' telle que pour toute valeur p supérieure à $\tilde{p}$'' ,le nombre optimal x°(p) associé à p soit 1 (c'est à dire une analyse par individu).

7°) On définit la fonction g suivante :

$g:]0,1[\longrightarrow \mathbb{N}$

$p \longmapsto g(p)=x°(p)$

- Montrer que g est une fonction en escalier décroissante.

- Montrer que $\lim_{p\to 0} g(p) = +\infty$

- Montrer que $\lim_{p\to 1} g(p) = 1$

II) Longueur d'une piste

On vous demande de concevoir une piste de ski. On vous impose au départ une forme approximative pour qu'elle comporte un certain nombre de difficultés.Enfin ,on vous précise quelle longueur doit faire cette piste.

Vous avez donc à résoudre le problème suivant :

On vous donne une fonction f définie sur $[a,b]$ et on désire calculer la longueur de l'arc de courbe formé par le graphe de cette fonction entre les deux points de coordonnées (a,f(a)) et (b,f(b)) .
On supposera f continue et dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ et f' continue sur $[a,b]$.
1°) Soit $(a_0,a_1,.....,a_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ (c'est à dire $a_0=a<a_1<a<....<a_n=b$) en n parties égales.
On considère les points M_i ($i\in\{0,1,.....,n\}$) de coordonnées $x=a_i$ $y=f(a_i)$.

On définit $d_n=\sum_{i=1}^{n} d(M_i,M_{i-1})$ (d est la distance euclidienne, c'est à dire :M(x,y) M'[x',y']

$$d(M,M') = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$)

Montrez qu'il existe n points $t_1,.....,t_n$ tels que $a_{i-1}<t_i<a_i$ $i\in\{1,.....,n\}$

avec $d_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(t_i))^2}$.

2°) Montrer que la fonction $g=\sqrt{1+(f')^2}$ est continue et intégrable sur $[a,b]$.

3°) Montrer que $d=\lim_{n\to+\infty} d_n = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

d sera donc la longueur de l'arc de courbe formé par le graphe de onction f entre les points de coordonnées (a,f(a)) et (b,f(b)) .

Applications

4°) Vérifier dans le cas où f est une fonction affine (c'est à dire $x \longmapsto f(x)=cx+d$) que le nombre d défini ci-dessus est égal à la longueur du segment de droite délimité par les points de coordonnées (a,f(a)) et (b,f(b)) . calculée par le théorème de Pythagore .

5°) Retrouver , en choisissant convenablement la fonction f et les deux nombres réels a et b , le périmètre d'un cercle en vous servant de la formule établie au 3°) .

6°) Calculer le nombre d en prenant la fonction f définie sur $[1,2]$ par $x \longmapsto f(x)=\sqrt{x^3}$.

Vous pourriez maintenant à l'aide de la formule établie au 3°) construire votre piste de ski en associant à chaque portion de votre piste une fonction dont le graphe reproduirait la forme de cette portion .

.../...

III) Equivalence de normes .

Le but de ce problème est de montrer que dans l'espace $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes (c'est à dire: si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes alors il existe deux nombres réels strictement positifs a et b tels que $\forall\ V\in\mathbb{R}^n\ \ a\|V\|_1\leq\|V\|_2\leq b\|V\|_1$).

Bien que cette propriété soit générale , nous allons nous restreindre au cas où les deux normes sont définies par un produit scalaire .

On note $(.,.)_1$ et $(.,.)_2$ les deux produits scalaires et $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ les normes associées (c'est à dire $V\in\mathbb{R}^n\ \ \|V\|_1=\sqrt{(V,V)_1}$, $\|V\|_2=\sqrt{(V,V)_2}$).

1°) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(*) Il existe un nombre réel b strictement positif tel que pour tout élément V de $\mathbb{R}^n$ on a $\|V\|_2\leq b\|V\|_1$

(**) Soit $\mathcal{U}_1=\{V\in\mathbb{R}^n\ /\ \|V\|_1=1\}$, alors il existe un nombre réel b strictement positif tel que pour tout élément V de $\mathcal{U}_1$ on a $\|V\|_2\leq b$.

Nous allons montrer la propriété (**) .

2°) Soit $(V_1,V_2,.....V_n)$ une base orthonormée pour le produit scalaire $(.,.)_1$.
Montrer que si V est un vecteur de $\mathcal{U}_1$ alors ses coordonnées dans la base $(V_1,V_2,.....V_n)$ sont en valeurs absolues inférieures ou égales à 1 .

3°) Montrer la propriété (**) .

4°) En déduire que les deux normes sont équivalentes .

Nous allons maintenant calculer dans un cas particulier les deux nombres a et b .

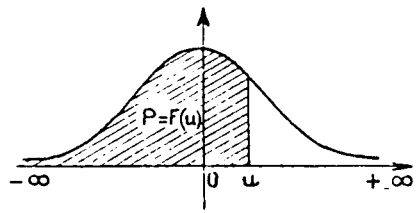
5°) On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de la base canonique .

- Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout élément de ses valeurs absolues de ses

norme .

- On prendra pour $\|.\|_2$ la norme euclidienne classique (c'est à dire : à tout élément V de $\mathbb{R}^n$ on associe la racine carrée de la somme des carrés de ses coordonnées).
Trouver deux nombres réels a et b strictements positifs qui satisfont à la double inégalité $a\|V\|_1\leq\|V\|_2\leq b\|V\|_1$ pour tout élément V de $\mathbb{R}^n$.

Fonction de répartition de la loi normale réduite
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99978	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997